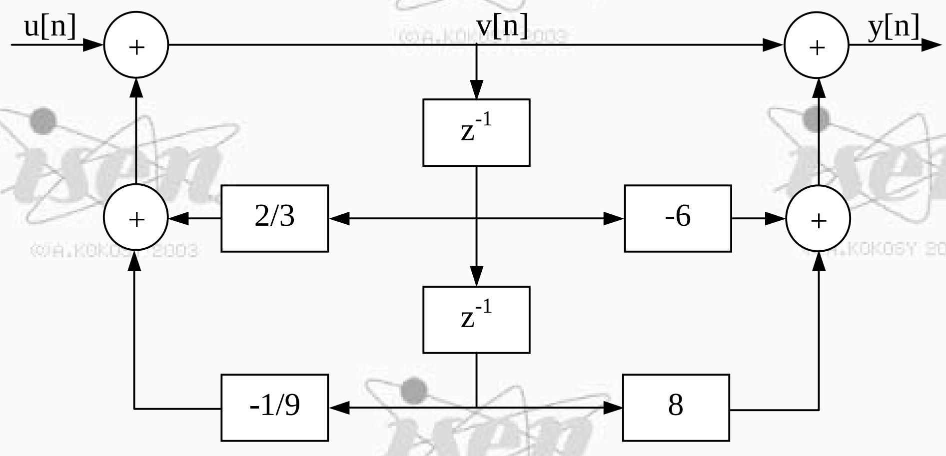
Correction du TD 7 - Automatique

Exercice 1



1. Déterminer l'équation récurrente. En déduire la fonction de transfert du système

En utilisant le théorème du retard on obtient :

$v(n) = u(n) + 2/3\, v(n-1) - 1/9\, v(n-2) \rightarrow V(z) = U(z) + 2/3\, z^{-1}V(z) - 1/9\, z^{-2}V(z)$

$y(n) = v(n) - 6v(n-1) + 8\, v(n-2) \rightarrow Y(z) = V(z) - 6z^{-1}\, V(z) + 8\, z^{-2}\, V(z)$

En remplaçant l'expression de V(z) obtenue de la première équation dans la deuxième équation on obtient :

$$Y(z) - 2/3\, z^{-1}\, Y(z) + 1/9\, z^{-2}Y(z) = U(z) - 6z^{-1}U(z) + 8z^{-2}U(z)$$

d'où on obtient l'équation récurrente :

$$y(n) = u(n) - 6u(n-1) + 8u(n-2) + 2/3y(n-1) - 8\, y(n-2)$$

et la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 - 6z + 8}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}}$$

2. Calculer la valeur de la sortie en régime permanent pour une entrée en échelon unitaire.

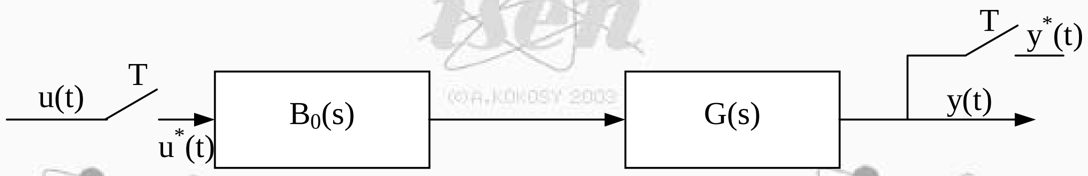
La transformée en Z de l'échelon est : $U(z) = \frac{z}{z-1}$

En utilisant le théorème de la valeur finale on obtient :

$$y_\infty = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})H(z)U(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\,\frac{z^2 - 6z + 8}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9}}\,\frac{z}{z-1} = \frac{1-6+8}{1-\frac{2}{3}+\frac{1}{9}} = \frac{27}{4}$$

Exercice 2

Soit le système :



avec T = 0.5s et $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+9}$.

1. Donner la fonction de transfert échantillonnée de ce système

La fonction de transfert du système de fonction de transfert G(s) échantillonnée en utilisant un bloqueur d'ordre zéro est :

$$G(z) = Z[B_0(s)G(s)] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = Z\left[\frac{s+2}{s[(s+2)^2+9]}\right] = Z\left[\frac{2}{13}\frac{1}{s}\right] + Z\left[\frac{-\frac{2}{13}s+\frac{5}{13}}{(s+2)^2+9}\right] = \frac{2}{13}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{13}Z\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\right] + \frac{3}{13}Z\left[\frac{3}{(s+2)^2+}\right.$$

En utilisant les transformée en Z des fonctions : $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ et $\dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$ et en effectuant les calculs on obtient :

$$G(z) = \frac{0.2345z - 0.06787}{z^2 - 0.05205z + 0.1353} = \frac{0.2345z^{-1} - 0.06787z^{-2}}{1 - 0.05205z^{-1} + 0.1353z^{-2}}$$

2. Calculer à chaque instant d'échantillonnage la valeur de la sortie du système échantillonné en réponse à un échelon de position unitaire. Donner les valeurs des six premiers échantillons.

L'entrée du système est u(t)=1, $t \geq 0$ → en discret u(kT)=u(k)=1, $k \geq 0$.

En utilisant l'équation récurrente :

$$y(k)=0.052y(k-1) - 0.135y(k-2) + 0.234\,u(k-1) - 0.067u(k-2)$$

on obtient :

$y(0) = 0$

$y(1) = 0.35u(0) = 0.35$

$y(2)=0.052y(1) + 0.234u(1) - 0.067u(0) = 0.185$

$y(3)=0.052y(2) - 0.135y(1) + 0.234\,u(2) - 0.067u(1)= 0.129$

$y(4)=0.052y(3) – 0.135y(2) + 0.234\ u(3) – 0.067u(2)=0.148$

$y(5)=0.052y(4) – 0.135y(3) + 0.234\ u(4) – 0.067u(3)=0.157$

3 .Etudier la stabilité du système

Le polynôme caractéristique est : $z^2 – 0.052z + 0.135 = 0$.

En calculant les racines on obtient :

$z_1 = -0.0260 + 0.3665i \rightarrow |z_1|=0.367 < 1$

$z_2 = -0.0260 - 0.3665i \rightarrow |z_2| = 0.367 < 1$

→ le système est stable.